

**ĐỀ THI HSG LỚP 9
QUẬN 11 – VÒNG 1 (2015-2016)**

Thời gian: 150 phút

(NGÀY THI: Thứ 7, Ngày 26/12/2015, lúc 8 giờ)

Bài 1: (3 điểm) Cho $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

a) Chứng minh: $ab + bc + ca = 0$.

b) Tính $M = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+2bc} + \frac{b^2}{b^2+2ca} + \frac{c^2}{c^2+2ab}}$.

Bài 2: (5 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^2 + x - 2 = \frac{28}{x^2 + x + 1}$

b) $2x\sqrt{x-1} + 5x = 5$

c) $\begin{cases} x^2 + x - y^2 - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2(x+y) = 0 \end{cases}$

Bài 3: (2 điểm) Cho $(O; r)$ nội tiếp ΔABC . Đường thẳng d qua O cắt AC , BC lần lượt tại D và E .

Tìm vị trí của d để diện tích ΔCDE đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 4: (4 điểm)

a) Cho a, b, c đều dương. Chứng minh rằng: $\frac{2a}{2a+b+c} + \frac{2b}{2b+a+c} + \frac{2c}{2c+a+b} \leq \frac{3}{2}$.

b) Tìm x, y nguyên biết $x^2 + 2y^2 + 3xy - 2x - 3y + 2 = 0$.

Bài 5: (4 điểm) Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O) , vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B và C là tiếp điểm). Qua C vẽ dây $CE // AB$. AE cắt (O) tại D , CD cắt AB tại I .

a) Chứng minh I là trung điểm của AB .

b) Lấy M trên tia BA sao cho $BM > BA$. Vẽ tiếp tuyến của (O) qua M , cắt AC tại K . OM cắt BC tại N , OK cắt BC tại F . Chứng minh tứ giác: $MFKN$ nội tiếp.

Bài 6: (2 điểm) Chín mươi lăm phần trăm thương mại quốc tế được vận chuyển bằng đường biển, với khoảng 50000 tàu gồm các loại như tàu chở dầu, tàu chở hàng rời, tàu chở công-ten-nơ. Phần lớn các loại tàu này chạy bằng dầu Đि-ê-zin.

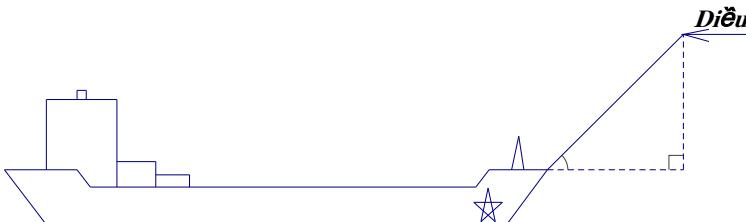
Nhiều kỹ sư có ý định thiết kế một hệ thống sử dụng sức gió để trợ giúp sức đẩy cho các tàu chở hàng. Họ đề xuất việc gắn vào tàu một chiếc điều đóng vai trò như một cánh buồm và như vậy sử dụng sức gió để giảm thiểu việc tiêu thụ dầu Đি-ê-zin cũng như tác động của nhiên liệu đối với môi trường.

a) Dây buộc điều dài khoảng bao nhiêu để có thể kéo một tàu chở hàng với một góc 45° , biết điều ở độ cao 150m theo hướng thẳng đứng như hình vẽ bên?

b) Vì giá dầu Đি-ê-zin cao (0,42 USD một lít), nên các chủ tàu chở hàng Làn Sóng Mới dự định trang bị cho tàu của họ một chiếc điều. Theo ước tính, một chiếc điều kiểu này cho phép giảm sự tiêu thụ dầu Đি-ê-zin khoảng 20%.

Mức tiêu thụ dầu Đì-ê-zen hàng năm nếu không có diều kéo khoảng 3500000 lít. Chi phí lắp đặt một diều kéo cho con tàu Làn Sóng Mới là 250000 USD.

Sau khoảng bao nhiêu năm thì khoản tiết kiệm từ dầu Đì-ê-zen có thể bù đắp chi phí lắp đặt diều kéo? Chứng minh câu trả lời của em dựa vào phép tính.



hoa HẾT hoa

**ĐỀ THI HSG LỚP 9
QUẬN 11 – Vòng 1 (2015-2016)
HƯỚNG DẪN**

Bài 1: (3 điểm) Cho $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

a) Chứng minh: $ab + bc + ca = 0$.

Ta có: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow ab + bc + ca = 0$

b) Tính $M = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}}$.

Ta có: $ab + bc + ca = 0 \Rightarrow bc = -ab - ca$

Do đó: $a^2 + 2bc = a^2 + bc + bc = a^2 + bc - ab - ca = a(a-b) - c(a-b) = (a-b)(a-c)$

Cmtt, ta có: $b^2 + 2ca = (b-c)(b-a); c^2 + 2ab = (c-a)(c-b)$

Do đó: $M = \sqrt{\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}}$

$$\Leftrightarrow M = \sqrt{-\frac{a^2}{(a-b)(c-a)} - \frac{b^2}{(b-c)(a-b)} - \frac{c^2}{(c-a)(b-c)}}$$

$$\Leftrightarrow M = \sqrt{\frac{-a^2(b-c) - b^2(c-a) - c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}}$$

$$\Leftrightarrow M = \sqrt{\frac{-a^2(b-c) + b^2(a-b+b-c) - c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}}$$

$$\Leftrightarrow M = \sqrt{\frac{-a^2(b-c) + b^2(b-c) + b^2(a-b) - c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}}$$

$$\Leftrightarrow M = \sqrt{\frac{(b-c)(b^2-a^2) + (a-b)(b^2-c^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}}$$

$$\Leftrightarrow M = \sqrt{\frac{-(b-c)(a-b)(a+b) + (a-b)(b-c)(b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}}$$

$$\Leftrightarrow M = \sqrt{\frac{(b-c)(a-b)(-a-b+b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}}$$

$$\Leftrightarrow M = \sqrt{\frac{(b-c)(a-b)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}}$$

$$\Leftrightarrow M = 1$$

Bài 2: (5 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^2 + x - 2 = \frac{28}{x^2 + x + 1}$

Đặt $t = x^2 + x + 1$, phương trình trở thành:

$$t-3 = \frac{28}{t} \Leftrightarrow t^2 - 3t = 28 \Leftrightarrow t = 7 \text{ hay } t = -4$$

$$\text{TH1: } t = 7 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 7 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hay } x = -3$$

$$\text{TH2: } t = -4 \Rightarrow x^2 + x + 1 = -4 \Leftrightarrow x^2 + x + 5 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\text{Vậy } S = \{2; -3\}$$

b) $2x\sqrt{x-1} + 5x = 5$

Cách 1: Điều kiện: $x \geq 1$, phương trình đã cho tương đương với:

$$2x\sqrt{x-1} + 5(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt{x-1} + 5(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(2x + 5\sqrt{x-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ 2x + 5\sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 5\sqrt{x-1} = -2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ -2x \geq 0 \\ 5\sqrt{x-1} = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x \leq 0 \\ 25(x-1) = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x \leq 0 \\ x=5 \Leftrightarrow x=1 \\ x=\frac{5}{4} \end{cases}$$

Vậy $S = \{1\}$

Cách 2: Điều kiện: $x \geq 1$, PT thành: $2x\sqrt{x-1} = 5 - 5x$. Do $2x\sqrt{x-1} \geq 0$ nên $5 - 5x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$.

So với điều kiện ta có $x = 1$ (thử lại thấy đúng). Vậy $S = \{1\}$

c) $\begin{cases} x^2 + x - y^2 - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2(x+y) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y) + x - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y+1) = 0 \\ (x+y)^2 - 2xy - 2(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 0 \\ x+y+1 = 0 \\ (x+y)^2 - 2xy - 2(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 0 \\ x+y+1 = 0 \\ (x+y)^2 - 2xy - 2(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ (x+y)^2 - 2xy - 2(x+y) = 0 \\ x+y = -1 \\ (x+y)^2 - 2xy - 2(x+y) = 0 \end{cases} \begin{array}{l} (\text{I}) \\ (\text{II}) \end{array}$$

Giải hệ (I) $\begin{cases} x=y \\ (x+y)^2 - 2xy - 2(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ (2x)^2 - 2x^2 - 2(2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0; y=0 \\ x=2; y=2 \end{cases}$

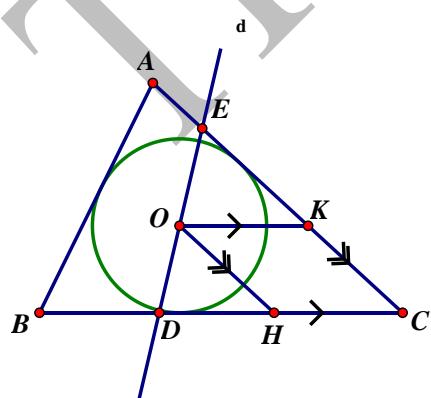
Giải hệ (II)

$$\begin{cases} x+y = -1 \\ (x+y)^2 - 2xy - 2(x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -1 \\ (-1)^2 - 2xy - 2(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -1 \\ xy = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2 + x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} = 0$$

suy ra hệ (II) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(0;0), (2;2)$

Bài 3: (2 điểm) Cho $(O; r)$ nội tiếp ΔABC . Đường thẳng d qua O cắt AC, BC lần lượt tại D và E . Tìm vị trí của d để diện tích ΔCDE đạt giá trị nhỏ nhất.



Vẽ $OH \parallel AC, OK \parallel BC$ ($H \in BC, K \in AC$) $\Rightarrow \begin{cases} H, K \text{ cố định} \\ \text{tứ giác } OHCK \text{ là hình bình hành} \end{cases} \Rightarrow S_{OHCK} \text{ không đổi}$

- $\Delta EOK \sim \Delta EDC$ ($g-g$) $\Rightarrow \frac{S_{EOK}}{S_{EDC}} = \left(\frac{OK}{DC}\right)^2 = \frac{OK^2}{DC^2}$
- $\Delta ODH \sim \Delta EDC$ ($g-g$) $\Rightarrow \frac{S_{ODH}}{S_{EDC}} = \left(\frac{DH}{DC}\right)^2 = \frac{DH^2}{DC^2}$

$$\Rightarrow \frac{S_{EOK} + S_{ODH}}{S_{EDC}} = \frac{OK^2 + DH^2}{DC^2} \Rightarrow \frac{S_{CDE} - S_{OHCK}}{S_{EDC}} = \frac{OK^2 + DH^2}{DC^2}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{S_{OHCK}}{S_{EDC}} = \frac{CH^2 + DH^2}{DC^2} \quad (\text{vì } OK = CH)$$

Mà $CH^2 + DH^2 \geq \frac{1}{2}(CH + DH)^2 = \frac{1}{2}DC^2$

Nên $1 - \frac{S_{OHCK}}{S_{EDC}} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{S_{OHCK}}{S_{EDC}} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow S_{EDC} \geq 2S_{OHCK}$ (không đổi)

Dấu “=” xảy ra khi

$CH = DH \Leftrightarrow H$ là trung điểm của $DC \Leftrightarrow O$ là trung điểm của $DE \Leftrightarrow d \perp OC$ tại O

Bài 4: (4 điểm)

a) Cho a, b, c dương. Chứng minh rằng: $\frac{2a}{2a+b+c} + \frac{2b}{2b+a+c} + \frac{2c}{2c+a+b} \leq \frac{3}{2}$.

$$\frac{2a}{2a+b+c} + \frac{2b}{2b+a+c} + \frac{2c}{2c+a+b} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{(a+b)+(a+c)} + \frac{b}{(b+a)+(b+c)} + \frac{c}{(c+a)+(c+b)} \leq \frac{3}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức: $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$, ta có:

$$\begin{cases} \frac{1}{(a+b)+(a+c)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) \\ \frac{1}{(b+a)+(b+c)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b+a} + \frac{1}{b+c} \right) \\ \frac{1}{(c+a)+(c+b)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{(a+b)+(a+c)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} \right) \\ \frac{b}{(b+a)+(b+c)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{b}{b+a} + \frac{b}{b+c} \right) \\ \frac{c}{(c+a)+(c+b)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{(a+b)+(a+c)} + \frac{b}{(b+a)+(b+c)} + \frac{c}{(c+a)+(c+b)} \leq \frac{3}{4}$$

b) Tìm x, y nguyên biết $x^2 + 2y^2 + 3xy - 2x - 3y + 2 = 0$.

Ta có : $x^2 + 2y^2 + 3xy - 2x - 3y + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x\left(\frac{3y-2}{2}\right) + \left(\frac{3y-2}{2}\right)^2 - \left(\frac{3y-2}{2}\right)^2 + 2y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3y-2}{2}\right)^2 - \frac{9y^2 - 12y + 4}{4} + \frac{8y^2 - 12y + 8}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3y-2}{2}\right)^2 - \frac{y^2}{4} = -1$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3y-2}{2} - \frac{y}{2}\right)\left(x + \frac{3y-2}{2} + \frac{y}{2}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)(x+2y-1) = -1$$

Do x, y nguyên nên ta có các trường hợp sau :

$$\text{TH1: } \begin{cases} x+y-1=1 \\ x+2y-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x+y-1=-1 \\ x+2y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm nguyên là: (x;y)= (4;-2), (-2;2)

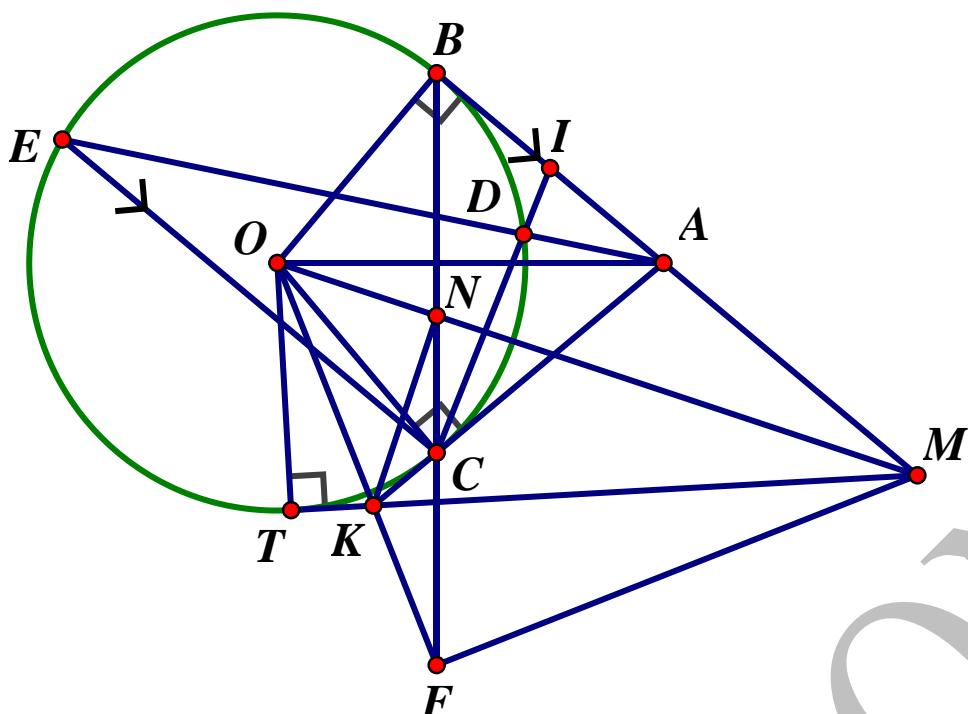
Bài 5: (4 điểm) Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến AB và AC (B và C là tiếp điểm). Qua C vẽ dây CE // AB. AE cắt (O) tại D, CD cắt AB tại I.

a) Chứng minh I là trung điểm của AB.

$$\Delta IBD \sim \Delta ICB (\text{g}-\text{g}) \Rightarrow \dots \Rightarrow IB^2 = ID \cdot IC$$

$$\Delta IAD \sim \Delta ICA (\text{g}-\text{g}) \Rightarrow \dots \Rightarrow IA^2 = ID \cdot IC$$

b) Lấy M trên tia BA sao cho BM > BA. Vẽ tiếp tuyến của (O) qua M, cắt AC tại K. OM cắt BC tại N, OK cắt BC tại F. Chứng minh tứ giác: MFKN nội tiếp.



Gọi T là tiếp điểm của tiếp tuyến thứ 2 kẻ từ M đến (O)

$\left\{ \begin{array}{l} OM \text{ là đường trung trực của BT} \\ N \in OM \end{array} \right.$

$\Rightarrow NB = NT$

$\Delta NBO = \Delta NTC (c - c - c)$

$\Rightarrow NBO = NTO$

Mà: $NBO = NCO (\Delta OBC \text{ cân tại } O)$

Nên: $NCO = NTO$

\Rightarrow Tứ giác ONCT nội tiếp.

Mà: Tứ giác OCKT nội tiếp.

Nên: Ngũ giác ONCKT nội tiếp

Suy ra: Tứ giác ONCK nội tiếp

$\Rightarrow FNM = OKC$

mà $OKC = OKT = FKM$ nên $FNM = FKM$

\Rightarrow tứ giác FKNM nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới 2 góc bằng nhau)

Bài 6: a) Chiều dài dây buộc diều là $\frac{150}{\sin 45^\circ} \approx 212(\text{m})$

b) Số lít dầu giảm được cho 1 tàu khi gắn diều kéo trong 1 năm: $3500000 \times 20\% = 700000$ (lít)

Chi phí giảm được cho 1 tàu khi gắn diều kéo trong 1 năm là: $0,42 \times 700000 = 294000$ (USD)

Số năm để khoán tiết kiệm từ dầu Di-ê-zen có thể bù đắp chi phí lắp đặt diều kéo là:

$250000 : 294000 \approx 1$ (năm)

❖ ❖ ❖ HẾT ❖ ❖